die Resultate der Analysen des Josefstädter und Rudlmann'schen Brunnenwassers vergleichshalber zusammenzustellen. Man erhält so für Ein W. Pfund gleich 16 Unzen Wasser:

Bestandtheile	Josefstädter Brunn.	Rudlmann'scher Brunn.
Salpetersaures Natron.....	4·010 Grane	0·977 Grane
Schwefelsaurer Kalk	2·176 „	1·979 „
Salpetersaurer Kalk.....	2·258 „	— „
Chlorcalcium	— „	0·099 „
Kohlensaurer Kalk	2·150 „	2·800 „
Chlormagnium	2·538 „	1·553 „
Salpetersaure Magnesia.....	2·365 „	1·155 „
Kohlensaure Magnesia.....	— „	0·694 „
Kohlensaures Eisenoxydul....	— „	0·010 „
Kieselsäure	0·321 „	0·132 „
Phosphorsaures Eisenoxydul, Thonerde, Extractivstoff, salpetersaures Kali, Verlust	Spuren	0·146 „
Summe der fixen Bestandtheile	15·818 Grane	9·547 Grane.

Es herrscht sonach in qualitativer Beziehung zwischen beiden Wässern ziemliche Analogie, in quantitativer Beziehung findet jedoch ein beträchtlicher Unterschied Statt, indem das Wasser des Josefstädter Brunnens fast zwei Drittheile mehr fixe Bestandtheile enthält, als das Mineralwasser des Rudlmannschen Brunnens.

Über die Brechung und Reflexion des Lichtes an Zwillingsflächen optisch-einaxiger Krystalle.

Von **J. Grailich.**

(Auszug aus einer für die Denkschriften bestimmten Abhandlung.)

Der geometrische Charakter der Zwillingsbildungen ist seit Beginn dieses Jahrhunderts ein Gegenstand scharfsinniger und umfassender Arbeiten gewesen. Die Schöpfer und Fortbilder der Naturgeschichte der unorganischen Welt haben nach einander die bewunderungswürdige Kraft ihrer Anschauung an dem Studium der Hemitropie versucht und die Gesetze, welche den Bau dieser Bildungen in sich fassen, dargestellt.

Über den krystallographisch-geometrischen Charakter hinaus erstrecken sich aber diese Forschungen nicht. Die Physik der

Zwillingskrystalle blieb bisher unbetrachtet. Es ist einleuchtend, dass in den Gesetzen, welche die Molecular-Actionen der Individuen aussprechen, auch die der Zwillingsbildungen enthalten sein müssen. Aber es lässt sich von vornherein mit Bestimmtheit behaupten, dass aus dem symmetrischen Gefüge der Individuen ein Zusammenhang zwischen den Erscheinungen zu beiden Seiten der Zusammensetzungsfläche sich ergeben müsse, der das Gepräge dieser Symmetrie in einfachen Verhältnissen ausspricht und dadurch den Geist, der sich überall am Gesetzmässigen und Einfachen erfreut, zur näheren Betrachtung einladet. Dazu gesellt sich ein zweiter Umstand, durch den die optische Untersuchung, die wir hier mittheilen, eine Ergänzung und Vervollständigung einer wichtigen Theorie wird.

Man kann sämmtliche Naturkörper optisch in zwei grosse Classen abtheilen, je nachdem sie das Licht auch in grösserer Dicke ungeschwächt durchlassen oder nicht, also in absorbirende und nicht absorbirende Mittel. Beide wirken auf das von ihrer Oberfläche reflectirte Licht verschieden. Jede dieser Classen zerfällt wieder in die Unterabtheilungen der isophanen und anisophanen (krystallinischen) Körper, je nachdem sie einen einfallenden Lichtstrahl nur nach einer oder nach zwei Richtungen durch Brechung ablenken; dabei können einfach- und doppeltbrechende Körper entweder mit dem Vermögen, die Polarisationsebene zu drehen, behaftet sein oder auch nicht. Ausser Cauchy hat noch Niemand die Theorie der Reflexion an absorbirenden Mitteln bearbeitet, denn Neumann's und Mac-Cullagh's Theorien der metallischen Reflexion sind nur Ableitungen empirischer Formeln. Dagegen sind die vollkommen durchsichtigen Körper Gegenstand ausführlicher Untersuchungen geworden. Nachdem die Polarisation durch Reflexion durch Malus und das Tangentengesetz für den Polarisationswinkel durch Brewster entdeckt worden, bahnte sich Fresnel durch die kühne Hypothese der Transversalität der Lichtvibrationen den Weg zu einer Methode, welche die Intensitäts-Formeln für den Fall darstellte, als die beiden sich begrenzenden Medien einfach brechend sind. Mac-Cullagh und Neumann dehnten die Untersuchung auch auf die Reflexion von Krystallflächen aus, indem sie longitudinale Oscillationen entweder ganz aus ihrer Theorie ausschlossen, wie ersterer, oder doch nicht weiter berücksichtigten, wie letzterer; Green und Cauchy

fassten die Frage endlich von Grund aus anders, indem sie die Nothwendigkeit der Entstehung von Vibrationen in der Richtung der Wellennormale statuirten, sobald das einfallende Licht nicht parallel der Trennungsebene schwingt, und mit Berücksichtigung dieser die Theorie für isophane Mittel gaben, wozu noch von Cauchy einige Näherungsangaben für den Fall kommen, wo das eine Medium krystallinisch doppelbrechend, das andere einfachbrechend ist. Der Fall, wo beide Mittel anisophan sind, wurde noch nicht in Betracht gezogen. Eine allgemeine Auflösung dieser Frage würde auch kaum noch an der Zeit sein, da zwar nichts im Wege steht, sie als ein mathematisches Problem aufzufassen, dagegen die physikalische Bedeutung wesentlich fehlte, indem weder die Natur noch die heutige Kunst optische Combinationen von verschiedenartigen Krystallen aufzuweisen hat. Nur in den Zwillingsbildungen, wo zwei Individuen derselben Natur in verwandter Stellung gesetzmässig mit einander verbunden sind, zeigt sich ein Gegenstand für diese erweiterte Anwendung der Theorie. Da zugleich Zwillingskrystalle bei weitem häufiger vorkommen als einfache, ja bei manchem Mineral ein einfaches Individuum vielleicht gar nicht existirt, so kann unsere Untersuchung nicht unfruchtbar bleiben; wir beschränken uns dabei der Einfachheit wegen auf die Betrachtung optisch-einaxiger Krystalle.

Wenn ein Lichtstrahl an die Grenze zweier durchsichtiger Medien gelangt, so erleidet er eine dreifache Modification; es kann seine Richtung, seine Amplitude und seine Phase afficirt werden.

Um die Richtungsänderung zu bestimmen, welche ein Lichtstrahl oder eine Lichtwelle an einer Zwillingsfläche erfährt, bediente ich mich des Principes der correspondirenden Bewegungen. In den Differentialgleichungen der Lichtbewegung treten als Variable die Coordinaten des Raumes x, y, z und die Zeit t auf; da es nach Cauchy's frühesten Untersuchungen zu einerlei Ergebniss führt, ob man die Differentialgleichungen durch Wellenflächen doppelter Krümmung oder durch ebene Wellen integrirt, welche die Wellenfläche einhüllen, und da die Oscillationsbewegung eine nach Zeit und Ort periodische ist, so kann man die particulären Integrale proportional einer Exponential- oder trigonometrischen Function des Quadrinoms $ux + vy + wz - st$ setzen. Ist nun die Trennungsebene der zwei Medien eine der Coordinatenebenen, etwa die Ebene XY, so wird nach dem Principe der correspondirenden

Bewegungen das genannte Quadrinom für $z=0$ in ein Trinom übergehen, das für die Gesammtheit der einfallenden, reflectirten und gebrochenen Wellen denselben Werth besitzt. Man erhält somit ein System von Gleichungen, deren Zahl gleich ist der Anzahl der betrachteten Wellen, also bei Zwillingen fünf (eine einfallende, zwei gebrochene und eben so viel reflectirte Wellen), aus welchen dann nachstehende Sätze gewonnen werden:

Die Schwingungsdauer wird an der Zwillingsfläche nicht geändert — Erhaltung der Farbe;

die Tracen der Wellenebenen fallen in eine gerade Linie zusammen;

die gebrochenen und reflectirten Wellennormalen bleiben in der Einfallsebene;

die Sinuse der Einfalls-, Reflexions- und Brechungswinkel sind den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten proportional.

Diese Sätze habe ich den Untersuchungen zu Grunde gelegt, welche ich die Ehre hatte vor einem Jahre der hohen Classe vorzulegen. Ich habe nun die dort begonnenen Entwickelungen weiter verfolgt und bin dabei unter andern zu folgenden Resultaten gelangt:

1. Für die durch die einfallenden ordinären Strahlen erregten reflectirten und gebrochenen ordinären Strahlen gilt das Gesetz, dass der Reflexions- und Brechungswinkel gleich ist dem Einfallswinkel. Es wird daher der Strahl ohne Ablenkung von seiner ursprünglichen Richtung, durch beide Individuen hindurch sich fortpflanzen.

2. Für die durch die einfallenden extraordinären Strahlen erregten reflectirten und gebrochenen extraordinären Strahlen gilt ein ähnliches Gesetz; nennt man nämlich die Ebene, welche durch den Strahl und die Projection der optischen Axe auf die Zwillingsfläche gelegt wird, Ebene des Strahles und demgemäss die Neigung dieser Ebene gegen die Zwillingsfläche den Winkel der Strahlen-Ebene, so findet man, dass der Winkel der reflectirten und gebrochenen Strahlen-Ebene gleich ist dem Winkel der einfallenden Strahlen-Ebene.

3. Sämmtliche Constanten der Gleichungen, welche die Richtung der gebrochenen und reflectirten ausserordentlichen Strahlen angeben, lassen sich reduciren auf die Tangente eines Winkels, der für jeden gegebenen Zwilling leicht gerechnet werden kann und den ich μ, den

charakteristischen Winkel des Zwillings genannt habe. Es ist der Einfallswinkel jenes Strahles, der zu einer Welle gehört, deren Normale senkrecht steht auf der Zwillingsebene, und der die merkwürdige Eigenschaft hat, dass er im zweiten Medium um einen Winkel abgelenkt wird, der doppelt so gross ist als der Einfallswinkel, und dass sein reflectirter Strahl in die Richtung des einfallenden Strahles zu liegen kommt.

4. Die extraordinär gebrochenen Strahlen werden aus der Einfallsebene abgelenkt, sie mögen von ordentlichen oder ausserordentlichen einfallenden Strahlen herrühren. Die grösste Ablenkung erfährt ein senkrecht einfallender Strahl, er wird um einen vollen Quadranten aus der Einfallsebene verrückt.

5. Da die durch die einfallenden extraordinären Strahlen erzeugten gebrochenen ausserordentlichen Strahlen stets mit den einfallenden und der Projection der optischen Axen auf die Zwillingsfläche in einer Ebene liegen, so lässt sich die verschiedene Neigung dieser Strahlen gegen jene Projection durch eine einfache Formel darstellen. Man findet, wenn die einfallenden Strahlen sämmtlich in einer Ebene liegen, dass die gebrochenen und reflectirten im Allgemeinen in einer Kegelfläche vom 4. Grade sich befinden, ausser, wenn die einfallenden Strahlen in dem Hauptschnitte oder in einer Ebene sich befinden, die senkrecht zum Hauptschnitte steht. Hieraus wird nun folgendes Constructions-Verfahren abgeleitet, durch welches die Richtung der gebrochenen Strahlen erhalten wird ohne Zuhilfenahme der Huyghens'schen Construction: Man lege durch den einfallenden Strahl eine Ebene senkrecht zum Hauptschnitt und bestimme die Cotangente a des Neigungswinkels dieser Ebene gegen die Zwillingsfläche. Nun construire man eine zweite Ebene senkrecht auf den Hauptschnitt, die gegen die Zwillingsfläche um einen Winkel geneigt ist, dessen Cotangente $a - z\,tg.\,\mu$ sei. Legt man endlich durch den Strahl und die Projection der optischen Axe auf die Zusammensetzungsfläche eine Ebene, so ist der Durchschnitt der zwei letzteren Ebenen die Richtung des gesuchten Strahles. — Auf ähnliche Weise wird der reflectirte Strahl gefunden.

Die vorliegenden Untersuchungen sind im ersten Abschnitte enthalten; im zweiten sind die Principien dargestellt, welche zur Bestimmung der Veränderung dienen, die die Amplitude und Phase durch Reflexion und Brechung erfahren. Eines derselben, das der Äqui-

valenz der Schwingungen an der Trennungsfläche zweier beliebiger Medien ist sowohl der Mac-Cullagh-Neumann'schen, als Green-Cauchy'schen Theorie eigenthümlich; es besteht darin, dass an der Grenze zweier Medien jedes Molecul durch die einfallende und reflectirte Bewegung zusammengenommen eben so weit aus seiner Ruhelage verrückt wird als durch die gebrochene Bewegung allein; nur dass Green und Cauchy die erregten Longitudinal-Vibrationen mit in Rechnung ziehen, was die ersteren Forscher unterlassen. Dagegen weichen die beiden Theorien in Bezug auf das zweite nothwendige Princip ab; Neumann und Mac-Cullagh bedienen sich nach Fresnel's Vorgange des Principes der Erhaltung der lebendigen Kräfte, während aus Green's Analyse ein anderes Princip sich ergibt, dessen auch Cauchy sich bedient und welches er mit dem Namen Princip der Continuität der Bewegung belegt, indem nach demselben die Differentialquotienten der absoluten Verschiebungen bezüglich einer auf der Grenzfläche senkrechten Coordinatenrichtung für beide Medien gleich sind, folglich die Bewegung aus dem einen ins andere continuirlich sich fortpflanzt. Dieses Princip hängt aufs Innigste mit der Annahme zusammen dass die Ätherschwingungen senkrecht zur Polarisationsebene geschehen und dass bei der Reflexion senkrecht zur Einfallsebene polarisirter Wellen Longitudinalerregung stattfinden. Letztere Annahme steht aber nicht nur mit den anschaulichen Verstellungen, die wir uns von einem *mouvement simple* bilden müssen, im vollsten Einklange, sondern sie wird auch in all ihren Folgerungen durch die Erfahrung bekräftigt, so dass Cauchy's Beweis für die Lage der Oscillationsebene um nichts minder kräftig ist als der von Stokes. An der Trennungsfläche zweier Krystallindividuen werden nun gewiss durch Reflexion und Brechung jene evanescirenden Strahlen geweckt, welche sich in Ellipsen fortbewegen, die gegen die brechende Fläche und Einfallsebene eine gewisse Neigung besitzen, ohne jedoch merklich von letzterer abzuweichen. Die Differenz in den Abmessungen und Neigungen dieser Ellipsen bewirkt die Correctur, deren die Fresnelschen Formeln bedürfen, um die Erscheinung genau und wirklich zu repräsentiren. Aus der Symmeterie der Zwillingsbildung folgt aber, die einfallende Welle sei eine ordentliche oder ausserordentliche, dass die Abmessungen dieser Ellipse in beiden Individuen gleich, die Bewegungen in derselben aber entgegengesetzt sein werden, so dass

sich dieselben in ihrer Wirkung gegenseitig anulliren. Es werden also bei Zwillingen jene Correctionsglieder wegfallen.

Das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte involvirt, so wie es bei diesem Probleme in Rechnung geführt wird, zwei andere Sätze. Zuerst die Erhaltung der Oscillationsdauer; denn indem man die Geschwindigkeit in den zwei Medien den Sinusen des Einfalls-, Reflexions- und Brechungswinkels proportional setzt, und ebenso bei Berechnung der bewegten Massen die Dimensionen der Volumina senkrecht gegen die Wellenebene nach demselben Verhältnisse misst, supponirt man, dass das homogene einfallende Licht in seiner Farbe nicht afficirt werde. — Der zweite Satz ist, dass ausserhalb des Bereiches der totalen Reflexion keine Phasenverschiebung stattfinde; ich habe nachgewiesen, dass diese Voraussetzung stillschweigend in Mac-Cullagh Analyse gelegt worden und sie erklärt sich von selbst, wenn man die Bedeutung des Principes der Erhaltung der lebendigen Kräfte überlegt, so wie es wenigstens in die Intensitätsforschungen eingeführt wird. Es heisst nämlich hier weiter nichts als dass die ganze Bewegungsgrösse, welche das Auge im einfallenden Lichte wahrnimmt, von demselben auch in der Summe des reflectirten und gebrochenen Lichtes empfunden werden müsse. Da aber im Allgemeinen ein Theil der einfallenden Bewegung auf die Bildung longitudinaler, vom Auge nicht wahrnehmbarer und nach der Natur des incompressiblen Äthers auch nicht über die unmittelbare Nähe der brechenden Flächen sich fortpflanzender Vibrationen verwendet wird, wobei nothwendig eine Phasenverschiebung eintreten muss, für welche das Auge unmittelbar keine Empfindung besitzt, so kann der Satz der lebendigen Kräfte in der Weise, wie ihn Neumann und Mac-Cullagh in Rechnung bringen, im Allgemeinen nicht auf völlig strenge Ergebnisse führen. Bei Zwillingskrystallen aber, wo eigentlich dies- und jenseits dasselbe Medium vorliegt, kann, wie wir oben gezeigt haben, keine oder doch nur eine völlig unmerkliche Phasenverschiebung stattfinden. Noch mehr: es kann die verschiedene Phasenverschiebung in den zwei senkrecht gegeneinander polarisirten Componenten, in die sich jeder Strahl zerlegen lässt, nur da wo die reflectirte Bewegung sich in einem isophanen Mittel fortpflanzt, durch die Ellipticität der Oscillationen des Strahles gemessen werden. Aber welches Mittel gibt es diese Verschiebung zu messen, wo die zwei reflectirten Componenten nicht in dieselbe Richtung fallen, wie dies

eben bei Zwillingskrystallen geschieht? Wir würden die ohnehin höchst weitläufige Rechnung nur unnöthig überladen, wollten wir die Anomalie der zwei Strahlen in dem Calcul der Allgemeinheit wegen mitführen, da wir doch allen Grund haben zu vermuthen, dass dieselbe der Null gleich ist, und selbst wenn eine höchst geringe Abweichung von diesem Werthe statthaben sollte, gegenwärtig wenigstens wir durchaus kein Mittel besitzen, diese Abweichung nachzuweisen oder ihren Betrag zu messen. Wir haben uns daher auf die Bestimmung der Amplituden beschränkt, und zwar in einer Approximation, die, wie Neumann's Messungen zeigen, der Vorwurf geringer Genauigkeit nicht treffen kann. Wir verweisen auf die Resultate, die er (Pog. Ann. XLII, 1—30) mittheilt: und diese beziehen sich doch auf einen Fall, wo das Mitwirken longitudinaler Vibrationen ausser Zweifel gesetzt ist. Ich habe daher meine Untersuchungen nach Neumann's Principien durchgeführt, nicht weil sie mir richtiger scheinen als die Cauchy's, sondern weil sie in dem speciellen Falle der Zwillingskrystalle zu denselben Resultaten führen müssen und die schöne vollendete Abhandlung über den Einfluss der Krystallflächen auf die Intensität des reflectirten Lichtes eine gebahnte Strasse bot, auf der ich zur Lösung meiner verwickelteren Aufgabe zu gelangen versuchen konnte.

Der dritte Abschnitt meiner Abhandlung enthält die Entwickelung der allgemeinen Formeln. Doch eignen sich diese zu keiner kurzen Besprechung und ich verspare mir die Mittheilung der aus denselben abgeleiteten Resultate für eine spätere Gelegenheit.

Zum Schlusse fühle ich mich noch gedrungen meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Regierungsrath v. Ettingshausen aufs Wärmste für die Liberalität zu danken, mit der er mir die zu dieser Arbeit nothwendigen Hilfsmittel zu Gebote stellte.